View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by DSpace at Belgorod State University

УДК 517.95

В.Б. ВАСИЛЬЕВ, Н.В. ЭБЕРЛЕИН

V.B. VASILYEV, N.V. EBERLEIN

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ

ON SOLVABILITY OF CERTAIN CLASS OF EQUATIONS

В данной статье рассмотрим краевую задачу с условием типа Дирихле для пары эллиптических псевдодифференциальных уравнений в плоском угле в пространствах Соболева - Слободецкого.
Ключевые слова: псевдодифференциальные уравнения, разрешимость, краевая задача.

In this article we will consider boundary value problem with Dirichlet type condition for a pair of elliptic pseudo-differential equations in a plane sector in Sobolev - Slobodetskii spaces.
Keywords: pseudo-differential equation, solvability, boundary value problem.

Мы напомним некоторые основные факты и методы [1,2], связанные с разрешимостью псевдодифференциального уравнения

$$(Au_+)(x) = f(x), x \in C_+^a, \qquad (1)$$

в пространстве $H^s(C_+^a)$, где C_+^a — m-мерный конус $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, ..., x_{m-1}, x_m), x_m > a|x'|, a > 0\}$, $x' = (x_1, ..., x_{m-1})$, A - псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющий условию

$$c_1 \le |A(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}| \le c_2. \qquad (2)$$

Такие символы являются эллиптическими [1,2] и имеют порядок $\alpha \in \mathbb{R}$.

По определению пространство $H^s(C_+^a)$ состоит из (обобщенных) функций из пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{C_+^a}$. Норма в пространстве $H^s(C_+^a)$ инициируется нормой пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$.

Обозначим $\overset{*}{C}{}_+^a$ конус, сопряженный конусу C_+^a:

$$\overset{*}{C}{}_+^a = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), a x_m > |x'|\},$$

$T(C_+^a)$ обозначает радиальную трубчатую область под конусом C_+^a, т.е. область многомерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m$ вида $\mathbb{R}^m + iC_+^a$ [3], знак $\sim$ обозначает преобразование Фурье:

$$\tilde{u}(\xi) = (Fu)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{ix\cdot\xi} u(x)dx.$$

Для описания картины разрешимости уравнения (1) вводится следующее

Определение. Волновой факторизацией символа $A(\xi)$ относительно конуса C_+^a называется его представление в виде

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_=(\xi),$$

где сомножители $A_{\neq}(\xi), A_=(\xi)$ должны удовлетворять следующим условиям:

1) $A_{\neq}(\xi), A_=(\xi)$ определены для всех значений $\xi \in \mathbb{R}^m$, кроме, возможно, точек вида $\{\xi \in \mathbb{R}^m : a^2\xi_m^2 = |\xi'|^2\}$;

2) $A_{\neq}(\xi), A_=(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(\overset{*}{C}{}_+^a)$, $T(\overset{*}{C}{}_-^a)$ соответственно с оценками

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi + i\tau)| \le c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm \varkappa},$$

$$|A_=^{\pm 1}(\xi - i\tau)| \le c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha-\varkappa)}, \forall \tau \in \overset{*}{C}{}_+^a.$$

Число $\varkappa \in \mathbb{R}$ называется индексом волновой факторизации символа $A(\xi)$.

Здесь мы рассмотрим следующую задачу на плоскости: найти пару функций $u_+ \in H^{s_1}(C_+^a)$, $v_- \in H^{s_2}(\mathbb{R}^2 \setminus C_+^a)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$(Au_+)(x) = 0, x \in C_+^a, \qquad (3)$$

$$(Bv_-)(x) = 0, x \in \mathbb{R}^2 \setminus C_+^a, \qquad (4)$$

где C+ = f X G ; X2 > a \xi\, a > 0}, A, B - псевдодифференциальные операторы с символами A(^), B(^), удовлетворяющими условию (2) с порядками a, в соответственно.

Предположим, что индексы волновой факторизации эе^^, эе^, символов A(Q, B(Q таковы, что - Si = 1 + Si, эе^ - S2 = 1 + S2, | < J/2, \ S2\ < 1/2.

Согласно теории, развитой в [2], общие решения уравнений (3), (4) имеют вид

й+(^) = A; 1(^) (Co(^1 - a^2) + rfo(^i + a^2)), (5)

P-(^) = \^) (fo(^i - a^2) + qo(^i + a^2)), (6)

где *Co, do. Го, qo* - произвольные функции одной переменной, co, *do* G *ff^(Wi+), г o, qo* G *Ts2*

S ^ = s_k -1/2, к = 1,2.

Для определения 4 произвольных функций задаются дополнительные условия (это устанавливает связь между парами c_0, d_0 и r_0, q_0) и линейная комбинация граничных значений u+ и у., подобно [4], в результате чего получается система линейных интегральных уравнений. Разрешимость последней системы линейных интегральных уравнений эквивалентна разрешимости поставленной краевой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1973. - 232 с.

2. Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. - М.: КомКнига - 2-е изд., 2010. - 135 с.

3. Владимиров В.С. Методы теории функции многих комплексных переменных. - М.: Наука, 1964. - 411 с.

4. Vasilyev V.B. On some transmission problems in a plane corner // Tatra Mt. Math. Publ. - 2015. - V. 63. - P. 291 - 301.

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
Профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
E-mail: yasilyey_v@bsu.edu.ru

Эберлейн Николай Владимирович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
Аспирант института инженерных и цифровых технологий
Тел.: +7-950-710-54-55
E-mail: 649377@bsu.edu.ru